FÍSICA - 2º BACHILLERATO
**INTERACCIÓN GRAVITATORIA**
**RESUMEN**

## MODELOS PLANETARIOS

### 1. Ptolomeo (s II).

- Modelo **geocéntrico**: la Tierra está en el centro del Universo.
- Todos los astros y las estrellas fijas se mueven en **órbitas circulares** alrededor de la Tierra.
- Para poder explicar el movimiento de los planetas sobre el fondo de las estrellas fijas (movimiento retrógrado) necesita introducir **epiciclos** y **deferentes**.
- El modelo es muy complicado matemáticamente, pero se ajusta muy bien a las observaciones y puede ser aplicado en la práctica (navegación, predicción de eclipses, etc.).
- La eficacia práctica del modelo y su plena consonancia con el Cristianismo hicieron que se mantuviera vigente hasta el s XVII.

### 2. Copérnico (s XVI).

- Modelo **heliocéntrico**: el Sol está en el centro del Universo.
- Todos los astros giran alrededor del Sol, salvo la Luna, que gira alrededor de la Tierra.
- Las **órbitas** de los astros son **circulares**, eso obliga a mantener epiciclos y deferentes para ajustar el modelo a las observaciones.
- El modelo es mucho más sencillo que el de Ptolomeo, pero choca con el pensamiento dominante en la época y es rechazado por la Iglesia.
- Objeciones: no era capaz de explicar la falta de observación de la paralaje estelar ni la ausencia de la sensación de movimiento.

### 3. Galileo (s XVII)

- Utiliza por primera vez un **telescopio** para observar los astros.
- Realiza **descubrimientos** que apoyan la **teoría heliocéntrica** y contradicen el modelo de Universo que había estado vigente durante toda la Edad Media.
- Descubre manchas en el Sol y montañas en la Luna (los astros son cuerpos imperfectos similares a la Tierra), observa cuatro satélites que giran alrededor de Júpiter (existen cuerpos celestes que no giran alrededor de la Tierra).

## LEYES DE KEPLER

**Kepler (s XVII), t**ras analizar los datos experimentales de Tycho Brahe, propone un modelo planetario heliocéntrico basado en tres leyes empíricas.

- **Primera Ley:** los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo **órbitas elípticas,** con el Sol en uno de sus focos.

  El movimiento de los planetas no es circular.

- **Segunda Ley (Ley de las áreas):** el radio de la órbita del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (el área barrida por unidad de tiempo por el vector de posición del planeta respecto al Sol es constante).

  Esto implica que la velocidad del planeta aumenta al acercarse al Sol y disminuye al alejarse de él.

  La velocidad máxima se alcanza en el **perihelio** (punto de la órbita más cercano al Sol) y la mínima en el **afelio** (punto de la órbita más alejado del Sol).

- **Tercera Ley (Ley de los periodos):** entre el periodo del planeta (**T**) y su distancia media al Sol (**a**) existe la siguiente relación:

  $$T^2 = k\, a^3$$

  donde k es una constante que tiene el mismo valor para todos los planetas del Sistema Solar.

  Si tenemos dos planetas A y B en órbita alrededor del Sol, la ley de los periodos nos dice que:

  $$\frac{T_A^2}{a_A^3} = \frac{T_B^2}{a_B^3}$$

El modelo de Kepler describe con enorme precisión el movimiento de los planetas, pero no indica cuál es la causa de que los planetas se muevan de este modo.

## LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON

- **Newton (s XVII)** logra explicar por qué los planetas se mueven obedeciendo las tres Leyes de Kepler. La causa es la **interacción gravitatoria** entre el Sol y los planetas.

- Newton va más allá del movimiento planetario, y afirma que la misma fuerza que hace que los planetas se muevan alrededor del Sol es la responsable de la caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra.

- **Ley de la Gravitación Universal:** todo par de cuerpos en el universo se atrae mutuamente con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.

De acuerdo con la Ley de la Gravitación Universal, la **fuerza gravitatoria** que una masa **M** ejerce sobre otra masa **m**, cuyos centros están separados por una distancia **r** es:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$$

donde:

- **G** es una **constante universal** que tiene el valor siguiente:

$$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N m}^2\ \text{kg}^{-2}$$

- $\vec{u}_r$ es un **vector unitario** cuya dirección viene dada por la recta que une los centros de M y m, y cuyo sentido es desde M hacia m.

- El signo **menos** indica que la fuerza tiene sentido opuesto a $\vec{u}_r$, es decir, la fuerza gravitatoria siempre es **atractiva.**

La masa **m** ejerce una fuerza sobre **M** igual en módulo y dirección pero de sentido opuesto.

## FUERZAS CONSERVATIVAS

1. En general, una fuerza que actúa sobre una partícula mientras ésta se desplaza realiza un **trabajo** sobre ella, de manera que proporciona o extrae energía de la partícula durante el desplazamiento.

   Si una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una partícula a lo largo de un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, el trabajo elemental $dW$ realizado por la fuerza sobre dicha partícula es:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

   Si consideramos un desplazamiento finito entre los puntos $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$, el trabajo total es:

$$W = \int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

2. Si la **fuerza** es **constante** (en módulo, dirección y sentido) y la trayectoria es una **recta**, el trabajo se expresa como:

$$W = \int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B}F\,dr\cos\alpha = F\cos\alpha\int_{r_S}^{r_B}dr = F\cos\alpha\ (r_B - r_A) = F\cos\alpha\ \Delta r$$

$$W = F\,\Delta r\cos\alpha$$

3. Una **fuerza** es **conservativa** cuando el trabajo que realiza sobre una partícula mientras ésta se mueve entre dos puntos <u>no depende del camino seguido</u> sino únicamente de las posiciones inicial y final de la partícula.

## ENERGÍA POTENCIAL

1. Cuando una fuerza **conservativa** actúa sobre una partícula, es posible definir una función llamada **Energía potencial** (denotada $E_P$ o U) de manera que se cumple lo siguiente:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P$$

Esto constituye el llamado **Teorema de la Energía Potencial**.

2. La Energía potencial depende únicamente de la posición, por tanto, si la partícula se mueve en una **trayectoria cerrada**, de manera que $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ , entonces $E_P$ (A) = $E_P$ (B), por lo que:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Es decir, para una fuerza conservativa, el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada es siempre nulo.

## ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

1. La fuerza **gravitatoria** es una fuerza **conservativa**, por lo que se le puede asociar una Energía potencial.

2. La **energía potencial gravitatoria** de una partícula de masa **m** que interactúa con otra partícula de masa **M**, cuyos centros están separados por una distancia **r**, viene dada por la expresión siguiente:

$$E_P = -\frac{G M m}{r}$$

3. La Energía potencial gravitatoria se define de manera que su valor sea **nulo** en el **infinito**.

## ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA TERRESTRE

1. Si llamamos $\mathbf{M_T}$ a la masa de la Tierra, la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa **m** situado a una distancia **r** del centro de la Tierra es:

$$E_P = -\frac{G M_T m}{r}$$

Si el cuerpo se halla a una altura **h** de la superficie de la Tierra, podemos escribir su energía potencial así:

$$E_P = -\frac{G M_T m}{(R_T + h)}$$

donde $\mathbf{R_T}$ es el radio de la Tierra

2. Si elevamos un cuerpo de masa **m** desde la superficie de la Tierra hasta una altura **h**, su energía potencial experimentará una variación dada por:

$$\Delta E_P = G M_T m \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{(R_T + h)} \right)$$

3. Si la altura **h << R**$_{\mathbf{T}}$, entonces, se puede demostrar que la variación de la energía potencial del cuerpo se puede expresar mediante la siguiente aproximación:

$$\Delta E_P = m g h$$

## ENERGÍA CINÉTICA

1. Llamamos energía cinética a la energía que un cuerpo posee asociada a su estado de movimiento:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

2. Sea $\vec{F}$ la resultante de todas las fuerzas (**conservativas y no conservativas**) que actúan sobre una partícula de masa **m**. El **Teorema de la Energía Cinética** afirma que el trabajo realizado por dicha fuerza resultante es igual a la variación de la energía cinética de la partícula:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C$$

3. Mientras el Teorema de la Energía Potencial sólo es válido para <u>fuerzas conservativas</u>, el Teorema de la Energía Cinética es válido <u>para todo tipo de fuerzas</u>.

## CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

1. La **energía mecánica** de un cuerpo se define como la suma de su energía cinética y su energía potencial:

$$E_M = E_C + E_P$$

2. Si **todas** las fuerzas que actúan sobre una partícula son **conservativas**, se pueden aplicar simultáneamente los teoremas de la energía cinética y la energía potencial:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_C(B) - E_C(A) = \Delta E_C$$

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_P$$

Como el trabajo ha de ser el mismo:

$$\Delta E_C = -\Delta E_P$$

$$E_C(B) - E_C(A) = E_P(A) - E_P(B)$$

$$E_C(B) + E_P(B) = E_C(A) + E_P(A)$$

$$E_M(B) = E_M(A)$$

Es decir, si un cuerpo se mueve sometido únicamente a la acción de **fuerzas conservativas**, su **energía mecánica se conserva** (permanece constante durante todo el movimiento). Este hecho constituye el **Principio de Conservación de la Energía Mecánica**.

3. Si un cuerpo se mueve sometido a la acción de **fuerzas conservativas y no conservativas**, el principio anterior adopta una expresión más general:

$$E_M(B) = E_M(A) + W_{NC}$$

donde $W_{NC}$ es el **trabajo** realizado por las **fuerzas no conservativas**.

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas <u>modifica el valor de la energía mecánica</u> del cuerpo.

$W_{NC}$ puede ser **positivo** o **negativo**: las fuerzas no conservativas pueden **incrementar** o **disminuir** la energía mecánica de un cuerpo.

4. La **fuerza de gravedad** es una fuerza **conservativa**.

Cuando un cuerpo se mueve sometido **únicamente** a la fuerza de **gravedad**, su **energía mecánica** se mantiene **constante** durante todo el movimiento.

5. La **energía mecánica** de una partícula de masa **m** que se mueve sometido a una **fuerza gravitatoria** debida a su interacción con otra partícula de masa **M** es:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r}$$

Durante el movimiento, los valores de <u>**v** y **r** pueden variar</u>, pero <u>la energía mecánica permanece constante</u>.

## CAMPO GRAVITATORIO

1. El **campo gravitatorio** generado por una partícula de masa **M** en un punto situado a una distancia **r** de ella es:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r$$

M recibe el nombre de **masa fuente**.

2. Si colocamos una partícula de masa **m** en presencia de la masa fuente **M**, aquella experimentará una fuerza gravitatoria dada por:

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

$$\vec{F} = m\left(-\frac{GM}{r^2}\vec{u}_r\right) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u}_r$$

3. El campo gravitatorio sólo depende de la masa fuente. Existe con independencia de que haya o no una partícula m que experimente la fuerza gravitatoria.

4. La existencia de un campo gravitatorio se pone de manifiesto cuando una partícula se sitúa dentro del campo. En ese momento, **la interacción entre el campo y la partícula** provoca que ésta experimente la acción de una fuerza gravitatoria.

5. La interacción gravitatoria entre dos masas se interpreta como **la interacción entre cada masa y el campo gravitatorio creado por la otra**. De este modo, se salva el problema de la acción a distancia que se desprende de la Ley de la Gravitación de Newton.

## CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

1. El campo gravitatorio generado por la Tierra **en su superficie** es, en módulo:

$$g_o = \frac{GM_T}{R_T^{\,2}} = 9{,}8\ m/s^2$$

2. El campo gravitatorio generado por la Tierra **en un punto exterior** situado a una distancia **r** de su centro es, en módulo:

$$g = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} \qquad r = R_T + h$$

3. El campo gravitatorio generado por la Tierra **en un punto interior** situado a una distancia **r** de su centro es, en módulo:

$$g = g_o\frac{r}{R_T} \qquad r < R_T$$

## APLICACIÓN AL MOVIMIENTO DE SATÉLITES EN ÓRBITA CIRCULAR

### 1. VELOCIDAD ORBITAL.

El módulo de la velocidad de un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra es:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$ En función del radio **r** de la órbita

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T + h)}}$$ En función de la altura **h** sobre la superficie

### 2. PERIODO ORBITAL.

El periodo de un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$$ En función del radio **r** de la órbita

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$ En función de la altura **h** sobre la superficie

### 3. VELOCIDAD DE ESCAPE DESDE LA SUPERFICIE TERRESTRE.

La velocidad de escape se define como la velocidad mínima que se debe proporcionar a una partícula que se encuentra en la superficie de la Tierra para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre, llegando **al infinito** con **velocidad nula**.

Aplicamos el Principio de Conservación de la Energía Mecánica:

$$E_M(\infty) = E_M(\text{sup})$$

$$E_C(\infty) + E_P(\infty) = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M m}{R_T}$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M m}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

La velocidad de escape se puede definir para cualquier astro de masa **M** y radio **R**. En ese caso, su expresión más general es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

## 4. ENERGÍA MECÁNICA DE UN SATÉLITE.

La **energía mecánica** de un satélite en **órbita circular** (también llamada **energía de enlace**) puede expresarse en función del radio de su órbita:

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T\, m}{r}$$

En una órbita circular:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

Sustituyendo en la expresión de la energía mecánica:

$$E_M = \frac{1}{2} m \left( \frac{GM_T}{r} \right) - \frac{G M_T\, m}{r}$$

$$E_M = \frac{1}{2} \frac{GM_T\, m}{r} - \frac{G M_T\, m}{r}$$

$$E_M = - \frac{G M_T\, m}{2r}$$

## MOMENTO ANGULAR DE UN PLANETA

1. El **momento angular** de una partícula de masa **m** respecto a un punto es:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \left( \vec{r} \times \vec{p} \right)$$

$$L = \left| \vec{r} \times \vec{p} \right| = m\, r\, v \;\; sen(\alpha \,)$$

2. **El momento angular de un planeta respecto al Sol es <u>constante</u>**, es decir, tiene el mismo valor (en módulo, dirección y sentido) en todos los puntos de la órbita.

3. Consideremos el momento angular de un planeta en el **afelio** y en el **perihelio**:

$$L_{af} = m\, r_{af}\, v_{af} \;\; sen\left( \frac{\pi}{2} \right) = m\, r_{af}\, v_{af} \qquad \text{Afelio}$$

$$L_{ph} = m\, r_{ph}\, v_{ph} \;\; sen\left( \frac{\pi}{2} \right) = m\, r_{ph}\, v_{ph} \qquad \text{Perihelio}$$

Como el momento angular es **constante**:

$$L_{af} = L_{ph}$$

$$m\, r_{af}\, v_{af} = m\, r_{ph}\, v_{ph}$$

$$r_{af}\, v_{af} = r_{ph}\, v_{ph}$$

4. El **semieje mayor** de una órbita elíptica es:

$$a = \frac{r_{af} + r_{ph}}{2}$$

5. La **excentricidad** de una órbita elíptica se define como:

$$e = \frac{c}{a}$$

donde

$$c = a - r_{ph}$$

Por tanto,

$$e = \frac{a - r_{ph}}{a}$$